Inducción Matemática

http://www.math.cl

1. Los números de Lucas son definidos por $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, y $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geq 2$. Probar que para todos los enteros no negativos n.

   (a) $\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (-1)^{d-i} L_{6(n+i)+1} = 2^{2d} L_{6n+1+3d}$

   (b) $L_{6(n+3)+1} = 19L_{6(n+2)+1} - 19L_{6(n+1)+1} + L_{6n+1}$

   (c) $L_{6n+1} - 1 \equiv 4n(6n+1)(4n-3) \pmod{128}$

2. Sea L_n el enésimo número de Lucas. Probar por inducción que:

$$L_{2^n} = 2^{n+1} \cdot c_n - 1$$

   donde c_n es un número impar.

3. Probar por inducción matemática que para cada entero positivo n:

   (a) 5 divide a $1 + (\frac{1+\sqrt{17}}{2})^{2^n} + (\frac{1-\sqrt{17}}{2})^{2^n}$

   (b) 5^2 divide a $1 + (\frac{1+\sqrt{17}}{2})^{4^n} + (\frac{1-\sqrt{17}}{2})^{4^n}$

4. Sea $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ y sea

$$g_k(x) = 1 + \sum_{i=1}^{4} (\Phi_5(x) - x^i)^k$$

   (a) Probar que para cualquier entero $n \geq 0$, $[\Phi_5(x)]^2$ es factor de $g_{10n+6}(x) + 3(10n+6)\Phi_5(x)$.

   (b) Sea $p \neq 5$ un primo impar divisor de $\Phi_5(x)$. Demostrar que p^2 divide a $g_{(p-1)n+6}(x) + 3((p-1)n+6)\Phi_5(x)$.

5. Sea a un entero positivo fijo. Sea $\{S_n\}$ la sucesión definida por $S_0 = 3$, $S_1 = 0$, $S_2 = 2a$, y $S_n = a \cdot S_{n-2} + (a-1) \cdot S_{n-3}$ para $n \geq 3$. Probar que para cualquier entero no negativo n:

$$S_{6n+4} \equiv (2n+1)(3n+2)(-2n \cdot a + 1)a^2 \pmod{a^4}$$

6. Sea F_n el enésimo número de Fibonacci. Probar que:

   (a) Para cualquier entero $n \geq 3$, $F_{2^n} + 2^{2^n} + (-1)^n - 31$ es divisible por 7^2 si n es par y por 7 si n es impar.

   (b) Para cualquier entero no negativo n, $F_{48n+16} + 2^{48n+16} - 30$ es divisible por 7^2.

7. Sea F_n el enésimo número de Fibonacci y sea L_n el enésimo número de Lucas. Si a, b, d y n son enteros no negativos, probar que:

   (a)
$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (-1)^{d-i} F_{2a(n+i)+b} =$$
$$= \begin{cases} F_{2an+b+ad}(L_{2a} - 2)^{\frac{d}{2}} & \text{si } d \text{ es par,} \\ (F_{2an+b+a(d+1)} - F_{2an+b+a(d-1)})(L_{2a} - 2)^{\frac{d-1}{2}} & \text{si } d \text{ es impar.} \end{cases}$$

   (b)
$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (-1)^{d-i} L_{2a(n+i)+b} =$$
$$= \begin{cases} L_{2an+b+ad}(L_{2a} - 2)^{\frac{d}{2}} & \text{si } d \text{ es par,} \\ (L_{2an+b+a(d+1)} - L_{2an+b+a(d-1)})(L_{2a} - 2)^{\frac{d-1}{2}} & \text{si } d \text{ es impar.} \end{cases}$$

   Notar que si a es impar, las mencionadas sumatorias son equivalentes a $F_{2an+b+ad}L_a^d$ y $L_{2an+b+ad}L_a^d$. Si a es par, $L_{2a} - 2 = 5F_a^2$.

1 Indicaciones.

Indicación Problema 1:

Parte a

Sea α el número áureo. El lado izquierdo de la expresión es igual a

$$\alpha^{6n+1}(\alpha^6 - 1)^d + (1 - \alpha)^{6n+1}((1 - \alpha)^6 - 1)^d$$

Mostrar que $\alpha^6 - 1 = 4\alpha^3$ y que $(1 - \alpha)^6 - 1 = 4(1 - \alpha)^3$. Ver también Problema 7, parte (b).

Parte b

Realmente es suficiente mostrar la identidad $L_{6(n+2)+1} = 18L_{6(n+1)+1} - L_{6n+1}$, lo cual es un caso particular de la formula Vajda-17a en [3].

Parte c

Usar parte (b) o parte (a) y el hecho que la d-ésima diferencia progresiva de un polinomio de grado $(d - 1)$ es igual a cero.

Indicación Problema 2:

Si bien la proposición es verdadera para $n = 0$, es conveniente comenzar con el caso base $n = 1$.

Usando la formula Vajda-17c [3], podemos deducir que $L_{2^{n+1}} = L_{2^n}^2 - 2$ para $n \geq 1$. A partir de esto tenemos que $1 + L_{2^{n+1}} = (1 + L_{2^n})((1 + L_{2^n}) - 2)$. Usar la hipótesis de inducción dos veces y completar la demostración.

Ver la solución de Bob Prielipp del problema que aparece en [4].

Notar que la sucesión $\{\frac{c_{i+1}}{c_i}\}$ puede ser usada para dar otra prueba de la infinitud de números primos [5].

Indicación Problema 3:

La solución de este problema es esencialmente la misma que la del Problema 5 (partes (c) y (d)) en [1]. Dado que no es obvio que las expresiones en el problema que contienen radicales son enteras, es necesario probar e incluir este hecho en la hipótesis inductiva.

Indicación Problema 4:

Parte a

Para evitar grandes cálculos, considerar los casos bases como probados.

Notar que $\Phi_5(x)$ es factor de $(\Phi_5(x) - x^i)^{10} - 1$ para $1 \leq i \leq 4$. Sea $G(n) = g_{10n+6}(x) + 3(10n + 6)\Phi_5(x)$, probar que $[\Phi_5(x)]^2$ es factor de $G(n + 2) - 2G(n + 1) + G(n)$.

Parte b

Solución 1

Usar parte (a) y el resultado del Problema 27 en [1].

Solución 2

De una conocida propiedad de los polinomios ciclotómicos, tenemos que $\Phi_5(x)$ es divisible por 5 o por números de la forma $5M + 1$ (Ver [2]). La demostración sigue inmediatamente de este hecho y parte (a).

Indicación Problema 5:

$S_n = S_{n,a} = (-1)^n + V_n(1, 1 - a)$, donde V_n es la secuencia de Lucas con valores iniciales $V_0 = 2$ y $V_1 = 1$ (ver [6]). Notar que para $a = 2$, $V_n(1, 1-a) = L_n$ (el enésimo número de Lucas) y para $a = 3$, $V_n(1, 1-a) = j_n$ (el enésimo número de Jacobsthal-Lucas). Usar la siguiente identidad $V_{6(n+2)+4} = V_{6(n+1)+4}V_6 - (1 - a)^6 V_{6n+4}$, lo cual es un caso especial de identidad (43) en [6].

Indicación Problema 6:

Parte a

Mostrar que para $n \geq 4$, la expresión tiene periodo 6 modulo 49. De la formula Vajda-13 en [3], tenemos que $F_{2^{n+3}} = F_{2^n} L_{2^n} L_{2^{n+1}} L_{2^{n+2}}$. Como resultado de una bien conocida propiedad de los números de Fibonacci, tenemos que F_m es divisible por 7, si m es divisible por 8. Adicionalmente, probar que para $n \geq 4$, 49 divide a $L_{2^n} - 2$ (Ver la identidad mencionada en el Problema 2).

Parte b

De acuerdo a la formula Vajda-15a en [3], $F_{48n+16}+F_{48(n+2)+16} = F_{48(n+1)+16}L_{48}$ Por lo tanto:

$$F_{48n+16} - 2F_{48(n+1)+16} + F_{48(n+2)+16} = F_{48(n+1)+16}(L_{48} - 2)$$

Por otra parte, $L_{48}-2 = 5F_{24}^2$ (Vajda-23) y F_{24} es divisible por 7. Así $F_{48n+16} - 2F_{48(n+1)+16} + F_{48(n+2)+16}$ es divisible por 49.

Probar que las otras expresiones satisfacen la misma recurrencia modulo 49 y completar la demostración.

Indicación Problema 7:

Parte a

Sea $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. El lado derecho es igual a:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2an+b}(\alpha^{2a}-1)^d - (1-\alpha)^{2an+b}((1-\alpha)^{2a}-1)^d)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{2an+b}(\alpha^a(\alpha^a-(1-\alpha)^a))^d - (1-\alpha)^{2an+b}((1-\alpha)^a((1-\alpha)^a-\alpha^a))^d)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^a-(1-\alpha)^a)^d(\alpha^{2an+b}\alpha^{ad} - (-1)^d(1-\alpha)^{2an+b}(1-\alpha)^{ad})$$

Para completar la demostración, considerar los casos d par e impar.

Parte b

Ver parte (a).

Un ligeramente más especial resultado puede ser encontrado en [7].

References

[1] http://www.math.cl/induccion.pdf.

[2] Yimin Ge. Elementary properties of cyclotomic polynomials. *Mathematical Reflections*, (2), 2008.

[3] R. Knott. Fibonacci and golden ratio formulae. http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibFormulae.html.

[4] Philip L. Mana. Problem b-474. *The Fibonacci Quarterly*, 20(2):179, 1982.

[5] S. Srinivasan. On infinitude of primes. *Hardy Ramanujan Journal*, 7:21–26, 1984.

[6] E. W. Weisstein. Lucas sequence. MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/LucasSequence.html.

[7] John Wessner. Binomial sums of fibonacci powers. *The Fibonacci Quarterly*, 4(4):355–358, 1966.